PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD · 2012

Matemáticas II

- BACHILLERATO
- FORMACIÓN PROFESIONAL
- CICLOS FORMATIVOS DE GRADO SUPERIOR

Examen

Criterios de Corrección y Calificación

EUSKAMPUS
Nazioarteko Bikaintasun Campusa
Campus de Excelencia Internacional

eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

www.ehu.es

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2012ko EKAINA

JUNIO 2012

MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS II

Azterketa honek bi aukera ditu. Haietako bati erantzun behar diozu.
Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jarri behar duzula.

- Azterketa 5 ariketaz osatuta dago.
- Ariketa bakoitza 0 eta 2 puntu artean baloratuko da.
- Programagarriak ez diren kalkulagailuak erabil daitezke.

Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas.
No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

- El examen consta de cinco ejercicios.
- Cada ejercicio será valorado entre 0 y 2 puntos.
- Se podrán utilizar calculadoras no programables.

OPCIÓN A

Ejercicio A1

Dado el sistema

$$\begin{cases} x+(A+1)y+Az=A+1 \\ Ay+z=0 \\ x+y=1 \end{cases}$$

a) Discutirlo según los valores del parámetro A.
b) Resolverlo, si es posible, para el caso A = 4.

Ejercicio A2

Dados los puntos A(1, 2, 3), B(1, -2, 4) y C(1, -3, a):

a) Calcular el valor del parámetro a, de tal manera que los tres puntos A, B y C estén alineados.
b) En el caso a = 5 hallar la recta que pasa por el origen y que además sea perpendicular al plano que contiene a los puntos A, B y C.

Ejercicio A3

Dada la función $f(x)=Ax^3+Bx$, sabemos que pasa por el punto P(1, 1) y además que en ese punto tiene tangente paralela a la recta $y=-3x$.

a) De acuerdo a dichas condiciones calcular los valores de A y B.
b) Determinar los extremos relativos, sus intervalos de crecimiento decrecimiento y por último realizar un dibujo de la función.

Ejercicio A4

Dadas las curvas $y=x^4$ e $y=x^2$

a) Dibujar el recinto finito limitado por las gráficas de las dos curvas.
b) Calcular el área de dicho recinto.

Ejercicio A5

En el patio de un Instituto hay 80 escolares, alineados en 8 filas y 10 columnas. Cada escolar da la mano a todos los escolares que están a su alrededor. Suponiendo que el saludo entre dos personas se cuenta como un único saludo. ¿Cuántos saludos se dieron en total?

OPCIÓN B

Ejercicio B1

Para cada par de números reales (a,b), se consideran las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} a & b & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & b & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Calcular los determinantes de las matrices A y B.
b) Para a = b = 1, calcular el determinante de la matriz producto $A\cdot B$.
c) Obtener, razonadamente, para qué valores de a y b ninguna de las dos matrices tiene matriz inversa.

Ejercicio B2

Se sabe que el plano x + y + z = 4 es perpendicular al segmento AB y que lo divide en dos partes iguales. El punto A es (1, 0, 0).
Halla las coordenadas del punto B y calcula la intersección del segmento AB con el plano.

Ejercicio B3

Una empresa fabrica cajas de cartón sin tapa, de volumen 4000 centímetros cúbicos. Se sabe que las cajas tienen su base cuadrada.
Hallar la altura y el lado de la base de cada caja para que la cantidad de cartón empleado en fabricarlas sea la mínima posible.

Ejercicio B4

Calcular las siguientes integrales:

a) $\int 2x^3 \ln(x)dx$
b) $\int \frac{x-2}{x^2-1}dx$

Ejercicio B5

Comprueba que un polígono convexo de 6 lados tiene 9 diagonales.

a) ¿Cuántas diagonales tendrá un polígono convexo de n lados?
b) ¿Cuántos lados tiene el polígono convexo que posee 230 diagonales?

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN.

1. El examen se valorará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
2. Todos los problemas tienen el mismo valor: hasta 2 puntos.
3. Se valorará el planteamiento correcto, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
4. No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc., siempre que no sean de tipo conceptual.
5. Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc., que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución se valorarán positivamente.
6. Se valorará la buena presentación del examen.

CRITERIOS PARTICULARES PARA CADA UNO DE LOS PROBLEMAS

OPCIÓN A

Problema A.1 (2 puntos)

a) La discusión del sistema se valorará hasta un máximo de 1,25 puntos.

b) La resolución completa para el caso A = 4, se valorará hasta un máximo de 0,75 puntos.

Problema A.2 (2 puntos)

Cada uno de los apartados se valorará hasta con 1 punto como máximo

Problema A.3 (2 puntos)

a) El cálculo correcto de A y B se valorará hasta un máximo de 0,5 puntos.

b) La obtención de los intervalos de crecimiento y decrecimiento se valorará hasta un máximo de 0,75 puntos.

c) El dibujo de la curva se valorará hasta un máximo de 0, 75 puntos.

Problema A.4 (2 puntos)

a) La obtención de los puntos de corte de las gráficas se valorará hasta 0, 5 puntos como máximo.

b) El dibujo del recinto y las gráficas correspondientes a las dos funciones se valorará hasta 0, 5 puntos como máximo

c) El cálculo del área del recinto que se pide aplicando la integral definida correspondiente se valorará hasta 1 punto como máximo

Problema A.5 (2 puntos)

- La realización de un buen esquema de representación o una explicación aclaratoria de la situación (distinguiendo los distintos tipos de posiciones de los escolares) se valorará hasta 0, 75 puntos como máximo.
- El cálculo correcto de la solución del problema se valorará hasta un máximo de 1, 25 puntos.

OPCIÓN B

Problema B.1 (2 puntos)

a) Calcular con corrección el determinante de cada matiz se valorará hasta un máximo de 0,5 puntos

b) Calcular el valor de producto de matrices para los valores señalados se valorará hasta un máximo de 0,5 puntos

c) Obtener los valores que cumplen la condición impuesta se valorará hasta un máximo de 1 punto.

Problema B.2 (2 puntos)

- La obtención del vector director de la recta se valorará hasta un máximo de 0,5 puntos
- La obtención del punto intermedio se valorará hasta un máximo de 0,75 puntos
- La obtención del punto simétrico se valorará hasta un máximo de 0,75 puntos.

Problema B.3 (2 puntos)

- El planteamiento del problema y la obtención de la función objetivo se valorará hasta un máximo de 1 punto.
- La obtención de la solución mediante la derivada se valorará hasta un máximo de 1 punto.

Problema B.4 (2 puntos)

- Cada una de las integrales tiene un valor de hasta 1 punto como máximo.

Problema B.5 (2 puntos)

a) La obtención de la fórmula general acompañada de la explicación pertinente, se valorará hasta un máximo de 1, 25 puntos.

b) El cálculo del número de lados se valorará hasta un máximo de 0, 75 puntos.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

Problema A.1

c) El determinante de la matriz de coeficientes vale A(1 - A).

- Para A distinto de 0 y de 1 el rango de la matriz es 3 y coincide con el rango de la matriz ampliada y con el número de incógnitas, por tanto en esos casos el sistema es compatible determinado.
- Para A = 0 las dos matrices tienen rango 2. En este caso el sistema es compatible indeterminado.
- Finalmente para A = 1 la matriz de coeficientes tiene rango 2 y la ampliada 3 por lo que el sistema es incompatible.

d) A = 4 es uno de los casos de solución única. La solución es:

$$(x, y, z) = (\frac{4}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{4}{3})$$

Problema A.2

c) Los puntos están alineados cuando el vector AB y el vector AC sean proporcionales, es decir m. AB = AC o m (0, -4, 1) = (0, -5, a - 3). De igualar la segunda coordenada se deduce que el factor de proporcionalidad tiene que ser m = 5/4 y al igualar la tercera resulta a = 17/4. Para el resto de valores los tres puntos no están alineados.

d) Con a = 5 los puntos son A = (1, 2, 3), B = (1,-2; 4) y C = (1, -3, 5). El vector característico del plano es perpendicular a los vectores AB = (0, -4, 1) y AC = (0,-5, 2) por tanto es v = (1, 0, 0) y la recta buscada tiene ese vector de dirección. Además pasa por el punto P = (0,0,0) por tanto su ecuación paramétrica es:

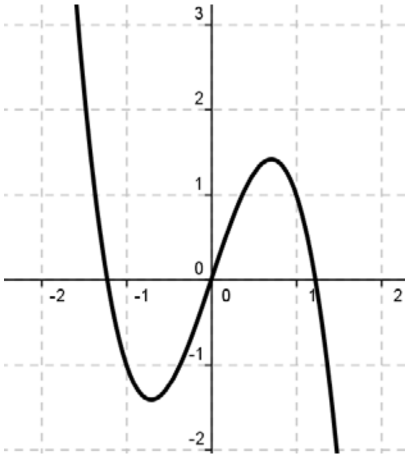
$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, mientras que la ecuación cartesiana es : $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Problema A.3

c) Por contener la gráfica a P = (1, 1) resulta A + B = 1. La otra condición implica que la derivada de f en el punto x = 1 debe ser -3 por tanto se obtiene 3A + B = -3. Resulta A = - 2 y B = 3 y la función es $f(x) = -2x^3 + 3x$

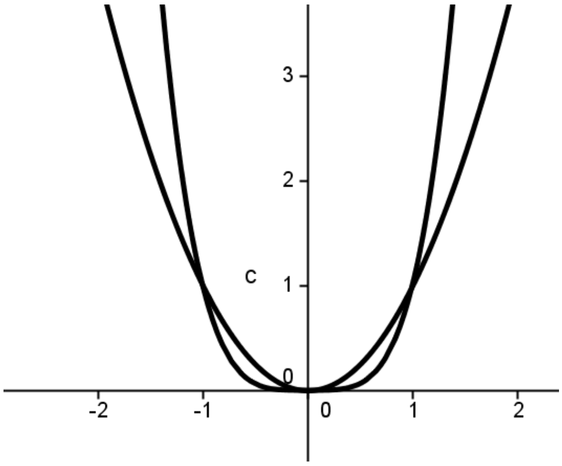
d) La primera derivada es $f'(x) = -6x^2 + 3$ y la segunda derivada es $f''(x) = -12x$

Por tanto los extremos están en $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ que es un mínimo y en $\frac{1}{\sqrt{2}}$ que es un máximo. La función es decreciente en $(-\infty, \frac{-1}{\sqrt{2}})$, creciente en $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ y decreciente en $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$. Su gráfica es



Problema A.4

c) El recinto está situado en la parte superior del plano para $-1 \leq x \leq 1$ y la curva $y = x^2$ está situada por encima de la curva $y = x^4$. El recinto es simétrico respecto al eje OY.



d) El área pedida es :

$$\int_{-1}^{1}(x^2 - x^4)dx = (\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}]_{-1}^{1} = \frac{4}{15}$$

Problema A.5

Los escolares situados en le parte interior saludan a los 8 que tienen alrededor. Los que están en las líneas exteriores saludan a 5 salvo los de las esquinas que saludan únicamente a 3. En el total de las líneas exteriores hay 32, cuatro en las esquinas y 28 en los laterales y en la parte interior están los 48 restantes. Además hay que tener en cuenta que el saludo entre dos escolares se debe contar una sola vez por que resultan

$$\frac{1}{2}(28 \times 5 + 4 \times 3 + 48 \times 8) = 268$$ saludos

OPCIÓN B

Problema B.1

a) Resultan det(A) = 2(5a -4b + 2) y det(B) = -a -4b + 6.

b) El determinante del producto es el producto de los determinantes por lo que resulta det(A . B) = 2(5a - 4b + 2)(-a -4b + 6) en particular para a = b = 1 se obtiene 6

c) Para que ninguna de las dos matrices tenga inversa deben ser cero los dos determinantes, es decir deben verificarse simultáneamente 2(5a - 4b + 2) = 0 y (-a - 4b + 6) = 0. La solución del sistema es a = 2/3 y b = 4/3

Problema B.2

a) y b) El vector característico de plano es v = (1, 1, 1) y ese es el vector de dirección de la recta que une A con B. La ecuación de la recta es

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

El punto intermedio buscado está en el plano. Por ello debe verificar x+y+z-4 = 0, es decir (1 + t) + t + t - 4 = 0, de donde t = 1 y el punto intermedio es C = (2, 1, 1). Finalmente las coordenadas del punto B verifican que C = 1/2(A+B), o sea B = 2C - A = (4, 2, 2) - (1, 0, 0) = (3, 2, 2).

Problema B.3

Sea x el lado de la base y h la altura. El volumen es $V = x^2.h = 4000$, es decir como la caja no tiene tapa, su superficie total es la suma de la superficie de la base que es x^2, más los cuatro laterales que totalizan

$$4.x.h = \frac{16000}{x}.$$

Por tanto la superficie de cartón empleada para construir la caja con lado x en la base es

$$S(x) = x^2 + \frac{16000}{x}.$$

Al minimizar resulta que para x = 20 se alcanza el mínimo buscado. La altura correspondiente es h = 10.

Problema B.4

a) La primera integral se puede calcular mediante integración por partes, el resultado es

$$\int 2x^3.\ln(x)dx = \frac{-x^4}{8} + \frac{x^4\ln(x)}{2} + C$$

b) Para la segunda integral se hace una descomposición en fracciones simples. Resulta:

$$\int \frac{x-2}{x^2-1}dx = \frac{-1}{2}\ln(x-1) + \frac{3}{2}\ln(x+1) + C$$

Problema B.5

a) De cada vértice salen diagonales a todos los vértices que no son él mismo y los dos contiguos, es decir a n - 3 vértices. Como en total hay n vértices y las diagonales están contadas dos veces resulta que el número total de diagonales de un polígono convexo con n lados es (1/2)n(n-3)

b) Se trata de encontrar n tal que (1/2)n(n-3)=230 . Resulta n = 23.